

# Un algorithme de reconstruction dans le cas d'un échantillonnage non ponctuel, périodique ou non

David BONACCI, Bernard LACAZE

Laboratoire Télécommunications Spatiales et Aéronautiques  
7 boulevard de la gare, 31500 Toulouse, France

david.bonacci@tesa.prd.fr, bernard.lacaze@tesa.prd.fr

**Résumé** – Les composants électroniques destinés à l'échantillonnage haute fréquence des signaux ont des temps de réponse susceptibles de dégrader les performances des algorithmes de reconstruction. Dans cet article, on considère un signal échantillonné par un composant modélisé par un filtre linéaire invariant activé à des instants potentiellement irréguliers et qui forment une suite vérifiant la condition de Landau (généralisation de la condition de Nyquist). On étudie les conséquences des imperfections des échantillonneurs dans la reconstruction du signal et dans l'estimation de l'enveloppe et de la phase.

**Abstract** – Electronic components dedicated to high frequency signal sampling have response times that can degrade the performance of reconstruction algorithms. In this paper, we consider a signal sampled by a component modeled as an invariant linear filter activated at potentially irregular instants and constituting a sequence fulfilling the Landau condition (generalization of the Nyquist condition). Consequences of sampler imperfections on the signal reconstruction and in the envelope and phase estimation are studied.

## 1 Introduction

L'échantillonnage peut être vu comme la représentation d'un ensemble  $\mathcal{E}$  par un de ses sous-ensembles  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  [1]. Classiquement,  $\mathcal{E}$  est constitué de variables aléatoires  $\mathcal{E} = \{E(t), t \in \mathbb{R}\}$  et  $\mathcal{F} = \{E(t), t \in \mathbb{A}\}$ , où  $\mathbb{A}$  est fini ou dénombrable. L'hypothèse périodique  $\mathbb{A} = \eta\mathbb{Z}$  est une idéalisation largement utilisée, mais pouvant se révéler limitée. On cherche à représenter au mieux les éléments de  $\mathcal{E}$  par des combinaisons (en général linéaires) d'éléments de  $\mathcal{F}$ . Par exemple, la formule de Shannon (ou de Nyquist ou Whittaker) reconstruit des processus dont le "spectre de puissance" est nul à l'extérieur de l'ensemble de fréquences  $\left[\frac{-1}{2\eta}, \frac{1}{2\eta}\right]$  avec  $\mathbb{A} = \eta\mathbb{Z}$  [2], [3]. En télécommunications, les échantillons  $Z(t_n)$  sont prélevés en sortie d'antenne par des composants électroniques qui ont des temps de réponse et de répétition non négligeables, à des instants  $t_n$  qui ne sont qu'approximativement périodiques [4]. La prise d'échantillon n'est pas instantanée, et ce que l'on prélève peut être considéré comme dépendant du comportement de composants au voisinage de points que l'on supposera connus avec précision. Un modèle simple associe une suite  $\{t_n, n \in \mathbb{Z}\}$  (les "instants" d'échantillonnage) avec une fonction  $g(t)$  qui représente la mise en route, le fonctionnement et l'arrêt du composant qui opère sur le phénomène étudié [5]. Le modèle d'action du composant sur le phénomène étudié est supposé linéaire, et la stationnarité sera assurée par l'utilisation de filtres linéaires invariants (LIF) dont les caractéristiques sont définies par  $g(t)$ .

On suppose que  $\mathbf{Z} = \{Z(t), t \in \mathbb{R}\}$  est un processus stationnaire de moyenne nulle avec une densité spectrale  $s_Z(f)$

définie par

$$E[Z(t)Z^*(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi f\tau} s_Z(f) df \quad (1)$$

où  $E[\cdot]$  est l'espérance mathématique et  $a^*$  est le complexe conjugué de  $a$ . Le processus  $\mathbf{U} = \{U(t), t \in \mathbb{R}\}$  est défini par

$$\begin{cases} U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) Z(t-u) du \\ G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-2i\pi fu} du. \end{cases} \quad (2)$$

$\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{U}$  sont respectivement l'entrée et la sortie d'un filtre linéaire invariant (FLI)  $\mathcal{G}$  de réponse impulsionnelle  $g(t)$  et de gain complexe (fonction de transfert)  $G(f)$ .  $\mathbf{U}$  est alors aussi stationnaire et de densité spectrale [2]

$$s_U(f) = [|G|^2 s_Z](f). \quad (3)$$

Étant donnée une suite d'échantillonnage  $\mathbf{t} = \{t_n, n \in \mathbb{Z}\}$ , on définit la suite aléatoire  $\mathbf{U}' = \{U_n, n \in \mathbb{Z}\}$  par

$$U_n = U(t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) Z(t_n - u) du. \quad (4)$$

Par exemple, lorsque  $g(t)$  est une fonction différente de 0 uniquement dans un voisinage de l'origine de largeur  $\varepsilon$ ,  $U_n$  prend en compte uniquement des valeurs de  $Z(t)$  dans un voisinage de  $t_n$  de largeur au plus  $2\varepsilon$ . À la limite, lorsque  $g = \delta$  (la distribution de Dirac), on obtient  $U_n = Z(t_n)$ . Le problème qui est traité dans cette communication concerne l'estimation de  $Z(t)$  à partir de la suite d'échantillonnage  $\mathbf{U}' = \{U_n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Dans la section 2, on commence par présenter les formules de reconstruction à partir d'échantillons prélevés à des instants irréguliers, puis on montre comment les corriger pour prendre

en compte l'effet du filtre déformant le signal à échantillonner. Des résultats de simulation sur un signal de télécommunications BPSK sont présentés en section 3 et la section 4 conclut cet article.

## 2 Interpolation

### 2.1 Formule de reconstruction avec instants non uniformes

Supposons que  $\Delta$  (le support du spectre  $s_Z$  de  $\mathbf{Z}$ ) et la suite d'échantillonnage  $\mathbf{t} = \{t_n, n \in \mathbb{Z}\}$  soient tels que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$

$$e^{2i\pi ft} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n(t) e^{2i\pi f t_n}, f \in \Delta.$$

Dans ce cas, la reconstruction parfaite est possible si on fait l'hypothèse que l'on sait traiter une infinité d'échantillons. Au prix d'hypothèses de régularité, cette égalité est équivalente à l'obtention d'une formule de reconstruction linéaire de la forme (en posant  $U_n = U(t_n)$ )

$$\begin{cases} Z(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n(t) Z(t_n) \\ U(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n(t) U_n \end{cases} \quad (5)$$

Par exemple, dans le cas particulier de l'échantillonnage uniforme d'un signal en bande de base avec  $t_n = n/f_s$ , les coefficients  $\alpha_n(t)$  sont déduits de la formule de reconstruction de Shannon bien connue dans le domaine de l'échantillonnage :

$$\alpha_n(t) = \frac{\sin(\pi f_s(t - t_n))}{\pi f_s(t - t_n)} \quad (6)$$

On considère maintenant le cas général d'un support spectral non nécessairement centré en 0 et d'un échantillonnage non uniforme du processus  $\mathbf{U} = \{U(t), t \in \mathbb{R}\}$  (les instants étant supposés connus) et on montre comment calculer les coefficients  $\alpha_n(t)$  dans ce cas, en utilisant le PNS2L (Periodic Nonuniform Sampling d'ordre  $2L$ ) déjà étudié dans [6].

Soit  $B$  la largeur de bande totale du processus  $\mathbf{Z}$  (largeur de  $\Delta$ ) et  $f_0$  la fréquence centrale. On définit les bandes de fréquence  $\Delta_k, 1 \leq |k| \leq L$  par

$$\Delta_k = \begin{cases} f_0 + \left[ \frac{(k-1)B}{2L}, \frac{kB}{2L} \right], k \geq 1 \\ f_0 + \left[ \frac{kB}{2L}, \frac{(k+1)B}{2L} \right], k \leq -1 \end{cases} \quad (7)$$

Les intervalles  $\Delta_k$  définissent une partition de l'intervalle  $\Delta$  en  $2L$  intervalles de longueur  $\frac{B}{2L}$ . Soit  $\mathbf{U}_k = \{U_k(t), t \in \mathbb{R}\}$  le résultat du filtrage passe-bande idéal de  $\mathbf{U}$  sur  $\Delta_k$ . On a alors l'égalité suivante :

$$U(t) = \sum_{1 \leq |k| \leq L} U_k(t). \quad (8)$$

En utilisant cette décomposition, l'équation (9) est démontrée dans [6] en se basant sur le PNS2L [7], [8].

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq |k| \leq L} U_k(t) e^{-i2\pi\gamma_k(t-\theta)} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j \dots \\ \dots \text{sinc} \left[ \frac{\pi B}{2L} (t - \theta) - \pi j \right] U \left( \theta + \frac{2jL}{B} \right) e^{-i2\pi f_0 \left( \theta + \frac{2jL}{B} \right)} \\ \gamma_k &= \frac{B}{2L} \left( k - \frac{1}{2} \text{sgn}(k) \right) + f_0. \end{aligned} \quad (9)$$

quel que soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et avec  $\text{sgn}(k) = k/|k|$ ,  $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ .

Les mesures  $U(t_n)$  apparaissent dans le membre de droite de (9) pour  $j = 0, \theta = t_n$ . Si  $L$  est suffisamment grand et si  $t$  est dans l'intervalle d'observation  $[t_{-L}, t_L]$ , on peut négliger les termes pour  $j \neq 0$  au membre de droite de (9) (la fonction sinc tend vers 0) :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq |k| \leq L} \widehat{U}_k(t) e^{-i2\pi\gamma_k(t-t_n)} &= \dots \\ \dots \text{sinc} \left[ \frac{\pi B}{2L} (t - t_n) \right] U(t_n) e^{-i2\pi f_0 t_n} \end{aligned} \quad (10)$$

où  $\widehat{U}_k(t)$  est un estimateur de  $U_k(t)$ . Ainsi, pour une valeur de  $t$  fixée, en faisant varier le paramètre  $n$  dans l'intervalle  $-L, \dots, -1, 1, \dots, L$ , un système de  $2L$  équations avec  $2L$  inconnues est obtenu. Plutôt que de considérer que les inconnues sont les termes  $(\widehat{U}_k(t), 1 \leq |k| \leq L)$  dans (10), il est plus judicieux de considérer que les inconnues sont les termes  $\{\widehat{U}_k(t) e^{-i2\pi\gamma_k t}, 1 \leq |k| \leq L\}$  pour que la matrice  $M$  à inverser devienne indépendante du temps (une seule inversion est requise alors que  $t$  varie dans l'intervalle de reconstruction :

$$M \underline{x}(t) = \underline{b}(t) \quad (11)$$

avec

$$M = \begin{bmatrix} e^{i\gamma_{-L} t_{-L}} & \dots & e^{i\gamma_L t_{-L}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i\gamma_{-L} t_L} & \dots & e^{i\gamma_L t_L} \end{bmatrix},$$

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \widehat{U}_{-L}(t) e^{-i2\pi\gamma_{-L} t} \\ \vdots \\ \widehat{U}_L(t) e^{-i2\pi\gamma_L t} \end{bmatrix}$$

et

$$\underline{b}(t) = \begin{bmatrix} \text{sinc} \left[ \frac{\pi B}{2L} (t - t_{-L}) \right] U(t_{-L}) e^{-i2\pi f_0 t_{-L}} \\ \vdots \\ \text{sinc} \left[ \frac{\pi B}{2L} (t - t_L) \right] U(t_L) e^{-i2\pi f_0 t_L} \end{bmatrix}$$

Notons que la matrice  $M$  ne dépend que des instants non uniformes  $t_n$  et pas du signal ni de son spectre. Une fois que la matrice  $M^{-1}$  a été calculée, on peut exprimer chaque  $\widehat{U}_k(t)$  comme une combinaison linéaire des observations  $U(t_n), n \in \{-L, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, L\}$  en utilisant (11), ce qui permet aussi d'exprimer  $U(t)$  comme une combinaison linéaire des  $U(t_n)$  en utilisant (8). Cela permet de calculer les coefficients  $\alpha_n(t)$  dans (5). L'obtention du signal analytique par exemple (ou du résultat du filtrage passe-bande idéal de  $U(t)$  sur n'importe quel intervalle  $\Delta_k$ ) peut se faire de façon très simple en ne sommant que les termes désirés dans (8) (par exemple uniquement les termes pour  $k > 0$  dans le cas du signal analytique).

### 2.2 Formules modifiées

Dans cette section, on montre comment modifier les formules de reconstruction présentées section 2.1 pour les adapter au cas d'un échantillonneur dont la transmittance n'est pas unitaire. Lorsque le filtre inverse  $\mathcal{G}^{-1}$  représentant le comportement convolutif de l'échantillonneur (2) est défini (si  $0 < m \leq$

$G(f) \leq M < \infty$  sur  $\Delta$ ), on a

$$\begin{cases} Z(t) = \mathcal{G}^{-1}[U](t) \\ \overline{G}^{-1}(f) = \begin{cases} 1/G(f), f \in \Delta \\ 0, f \notin \Delta \end{cases} \\ \overline{g}^{-1}(t) = \int_{\Delta} e^{2i\pi ft} \frac{df}{G(f)}. \end{cases} \quad (12)$$

$\overline{G}^{-1}(f)$  et  $\overline{g}^{-1}(t)$  sont respectivement le gain complexe et la réponse impulsionnelle du filtre inverse  $\mathcal{G}^{-1}$ . On a aussi, d'après (5)

$$Z(t) = \mathcal{G}^{-1}[U](t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}^{-1}(t-u) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n(u) U(t_n) du.$$

Au prix d'un changement d'ordre des sommations

$$Z(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}^{-1}(t-u) \alpha_n(u) du \right] U_n. \quad (13)$$

On obtient donc une formule exacte reliant  $Z(t)$  aux échantillons  $U_n = U(t_n)$ .

Supposons maintenant que l'on confonde l'échantillonnage idéal (les  $Z(t_n)$ ) avec la réalité (les  $U(t_n)$ ). Cela signifie, d'après (5) que l'on prend  $U(t)$  comme estimation de  $Z(t)$ . L'erreur commise  $\sigma$  en utilisant des valeurs approchées de  $Z(t_n)$  est donc définie par

$$\sigma^2 = \mathbb{E} \left[ |Z(t) - U(t)|^2 \right] = \int_{\Delta} |1 - G(f)|^2 s_Z(f) df. \quad (14)$$

Par exemple, considérons le cas de l'échantillonneur-bloqueur qui moyenne le signal à mesurer autour de l'instant d'échantillonnage considéré.

$$g(t) = \frac{1}{2\varepsilon}, |t| < \varepsilon \quad (15)$$

dont le gain complexe est

$$G(f) = \text{sinc}(\varepsilon 2\pi f) \quad (16)$$

Dans le cas particulier d'un bruit blanc de spectre  $s_Z(f) = \frac{1}{B}$ ,  $f \in [f_0 - \frac{B}{2}, f_0 + \frac{B}{2}]$  par exemple, (14) se simplifie en

$$\sigma^2 = \frac{1}{B} \int_{f_0 - \frac{B}{2}}^{f_0 + \frac{B}{2}} (1 - \text{sinc}(\varepsilon 2\pi f))^2 df, \quad (17)$$

La puissance de l'erreur de reconstruction tend vers la puissance de signal lorsque  $f_0$  augmente, entraînant une diminution du rapport signal à bruit (SNR : Signal to Noise Ratio). Ceci est illustré figure 1 dans le cas d'un bruit blanc dans une bande  $B = 1$  Hz pour un échantillonneur-bloqueur (15) pour différentes valeurs de  $\varepsilon$ .

### 3 Simulations

Le signal considéré pour les simulations est un signal de télécommunications BPSK (Binary Phase-Shift Keying) modulé dont la représentation en bande de base  $Z_b(t)$  est construite

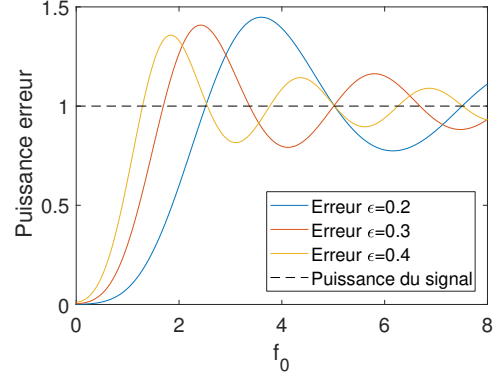


FIGURE 1 – Erreur de reconstruction due à la transmittance de l'échantillonneur en fonction de  $f_0$ .

en filtrant un train de bits équiprobables (Diracs séparés d'un intervalle correspondant à la période symbole  $T$  affectés d'un signe  $\pm 1$ ) par un filtre RCF (Raised Cosine Filter) de fréquence de coupure  $R = \frac{1}{T}$  (correspondant au rythme symbole) et de facteur de forme (ou roll-off)  $\beta = 0.25$  (18).

$$H(\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| \leq \frac{\pi(1-\beta)}{T} \\ \frac{T}{2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{T}{2\beta} \left[ |\omega| - \frac{\pi(1-\beta)}{T} \right] \right) \right], & \frac{\pi(1-\beta)}{T} < |\omega| \leq \frac{\pi(1+\beta)}{T} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (18)$$

avec  $\omega = 2\pi f$ . On suppose que l'on mesure le signal  $Z(t) = Z_b(t)e^{i2\pi f_0 t}$  directement en Fréquence Intermédiaire (FI) : l'intervalle  $\Delta$  est centré autour d'une fréquence porteuse correspondant à la pulsation  $f_0 = 1.6 \times R$ . On choisit  $R = 1$  Hz et on échantillonne ce signal à la fréquence d'échantillonnage moyenne correspondant à la plus petite fréquence d'échantillonnage uniforme que l'on pourrait utiliser pour échantillonner ce signal  $f_s = (1 + \beta)R$  (fréquence de Landau correspondant à la bande totale du signal [9]), en utilisant  $2L = 120$  échantillons. On suppose que les échantillons de  $Z(t)$  sont collectés à la sortie d'un échantillonneur "low-cost" introduisant une gigue (jitter) dans les instants d'échantillonnage choisis ici exagérément grand (jitter de 100%) : on observe  $Z(t)$  aux instants

$$t_n = nT_s + \lambda(n), n \in \{-L, \dots, -1\} \cup \{1, \dots, L\} \quad (19)$$

où  $T_s = \frac{1}{f_s}$  est la période d'échantillonnage moyenne et  $\lambda(n)$  est uniformément réparti entre  $-\frac{T_s}{2}$  et  $\frac{T_s}{2}$ .

La réponse impulsionnelle de l'échantillonneur est aussi supposée non parfaite. Dans cette illustration on considère le cas de l'échantillonneur-bloqueur défini par (15) pour une valeur de  $\varepsilon = 0.221$  s. La valeur de  $\varepsilon$  doit être choisie telle que  $G(f)$  ne s'annule pas sur  $\Delta$  (support spectral de  $Z(t)$ ). Notons que ce type d'échantillonneur en FI existe sur le marché [10]. Le spectre de  $Z(t)$  et la transmittance du filtre (forme supposée de l'échantillonneur) sont représentés figure 2. À cause de cet effet de filtrage le signal reconstruit est atténué et distordu si on le reconstruit directement en utilisant (10) à partir des échantillons filtrés en FI comme on peut le voir figure 3. Les instants d'échantillonnage non uniformes considérés sont représentés

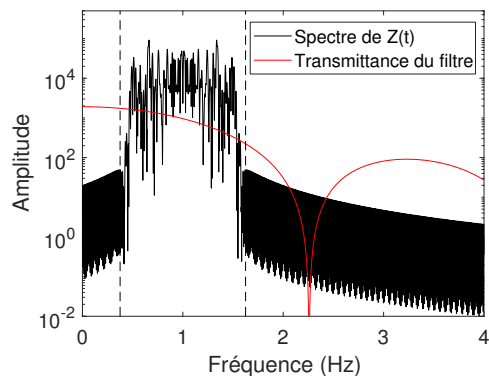


FIGURE 2 – Spectre du signal et transmittance de l'échantillonneur.

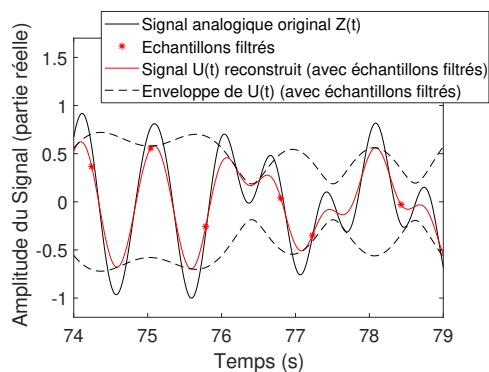


FIGURE 3 – Partie réelle du signal reconstruit à partir des échantillons filtrés en utilisant le PNS2L (10).

par des étoiles et seule la partie réelle des signaux est représentée. L'enveloppe du signal (module du signal analytique) est elle aussi mal estimée. Notons que cette distorsion aurait été bien plus légère si on avait échantillonné le signal en bande de base plutôt qu'en FI. Par contre, si on utilise les formules corrigées tenant compte de la forme de l'échantillonneur (13), la reconstruction du signal en FI et l'estimation de l'enveloppe sont quasiment parfaites comme on peut le voir figure 4.

## 4 Conclusion

Dans cet article, nous avons montré comment on peut corriger numériquement les effets d'un échantillonneur "low-cost" à la fois en termes de jitter et en termes de distorsions et atténuations pour l'échantillonnage directement en haute fréquence de signaux modulés (tels que les signaux de télécommunications par exemple) du moment que les instants d'échantillonnage et la transmittance de l'échantillonneur sont connus. Le même procédé peut en particulier être utilisé pour un échantillonnage uniforme ou pour des échantillonneurs entrelacés (chacun fonctionnant à un rythme 2 fois plus faible), permettant d'économiser en complexité matérielle au prix d'une certaine complexité numérique. Les simulations ont permis de mettre en évidence les performances de la méthode proposée dans le

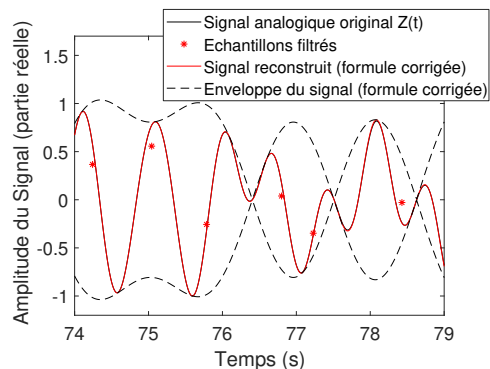


FIGURE 4 – Partie réelle du signal reconstruit à partir des échantillons filtrés en utilisant les formules corrigées (13) appliquées au PNS2L (le signal reconstruit est superposé au signal original).

cas particulier d'un signal BPSK échantillonné en FI avec fort jitter.

## Références

- [1] E. Borel, *Sur l'interpolation*, Compte Rendu de l'Académie des Sciences, **124** (1897) 673-676.
- [2] A. Papoulis, *Signal Analysis*, Mac-Graw Hill (1977).
- [3] J. R. Higgins, *Five short stories about the cardinal series*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1) (1985) 45-89.
- [4] B. Lacaze, *A Theoretical Exposition of Stationary Processes Sampling*, Samp. Th. in Sign. Im. Proc. **4** (3) (2005) 201-230.
- [5] M. Unser, A. Aldroubi, *A General Sampling Theory for Nonideal Acquisition Devices*, IEEE Transactions on Signal Processing **42** (11) (1994) 2915-2925.
- [6] D. Bonacci, B. Lacaze, *Lowpass/Bandpass signal reconstruction and digital filtering from nonuniform samples*, IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (2015) 3626-3630.
- [7] J. L. Yen, *On Nonuniform Sampling of Bandwidth-Limited Signals*, IRE Trans. on Circ. Th., CT-3 (12) (1956) 251-257.
- [8] Y. P. Lin, P. P. Vaidyanathan, *Periodically nonuniform sampling of bandpass signals*, IEEE Trans. on Circuits and Systems-2, **45** (3) (1998) 340-351.
- [9] H. J. Landau, *Sampling, Data Transmission, and the Nyquist Rate*, Proc. of the IEEE **35** (10) (1967) 1701-1706.
- [10] M. Rives, *Intermediate Frequency (IF) Sampling Receiver Concepts*, National Semiconductor Analog Edge, **4** (3) (2006).