

Estimation spectrale par découpage en sous-bandes d'un signal modulé.

Spectral estimation using subband decomposition and modulation.

David Bonacci , Corinne Mailhes
ENSEEIH/TéSA, Institut National Polytechnique de Toulouse
2 Rue Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse Cedex 7, France
david.bonacci,corinne.mailhes@tesa.prd.fr

Résumé

La décomposition en sous-bandes est reconnue pour améliorer les performances de l'estimation spectrale mais l'utilisation de filtres réels entraîne un recouvrement fréquentiel au voisinage des frontières des sous-bandes. Cet article présente une étude de ce problème et propose d'utiliser une modulation du signal à analyser suivie d'un découpage en sous-bandes. Ceci permet d'éliminer le problème du recouvrement tout en gardant les bonnes propriétés du découpage en sous-bandes (amélioration de la résolution fréquentielle et parfois, diminution de l'erreur de prédiction linéaire). Des simulations confirment l'intérêt de la méthode.

Mots Clef

Découpage en sous-bandes, analyse spectrale, recouvrement spectral.

Abstract

Subband decomposition has already been shown to increase performances of spectral estimation. But the use of real filters induces frequency overlapping at the neighborhood of subbands boundaries. This paper proposes to study this problem and introduces a procedure based on subband decomposition and frequency modulation. This allows to eliminate the overlapping frequency problem occurring when spectral estimation is applied after subband decomposition. Moreover, the proposed method preserves good properties of subband decomposition (a frequency resolution increase and a possible linear prediction error reduction). Simulations confirm the interest of this method.

Keywords

Subband decomposition, spectral analysis, spectral overlapping.

1 Introduction

La décomposition en sous-bandes a été utilisée avec succès dans diverses applications de traitement du signal et des images comme le codage de la parole, la compression d'images et de vidéos [1], [2]. Des auteurs ont récemment démontré la puissance du découpage en sous-bandes pour

l'estimation spectrale [3], [4]. Plus précisément, on montre que les performances d'une estimation spectrale traditionnelle peuvent augmenter si celle-ci est appliquée sur les signaux décimés issus d'un banc de filtres approprié déterminant la décomposition en sous-bandes plutôt que sur le signal original. Ces propriétés ont été théoriquement expliquées comme suit :

- (P_1) pour un signal périodique à spectre de raies, le rapport signal à bruit et la résolution fréquentielle augmentent d'un facteur égal au nombre de sous-bandes [4].
- (P_2) pour un signal à spectre continu, on a une diminution de l'ordre du modèle dans les sous-bandes et par conséquent une diminution du nombre de conditionnement de la matrice d'autocorrélation [5].

Ces résultats intéressants ont été démontrés dans le cas d'un banc de filtres passe-bande idéaux, c'est-à-dire ayant une réponse fréquentielle parfaitement rectangulaire. Des résultats expérimentaux ont montré qu'ils s'appliquent aussi à des bancs de filtres non idéaux, comme les Filtrés-Miroir en quadrature [3] ou des bancs issus d'un même filtre modulé grâce à un cosinus [4]. Mais lorsqu'on utilise de tels bancs de filtres non idéaux, la même composante fréquentielle peut apparaître dans deux sous-bandes contigües à deux fréquences différentes. Ce phénomène, appelé *recouvrement spectral*, se produit lorsque la fréquence de la composante fréquentielle en question est proche de la frontière de la sous-bande qui le contient. Même si ces deux fréquences sont liées, ce recouvrement spectral peut bien sûr être très gênant dans des problèmes où le nombre de composantes fréquentielles est inconnu. Cet article présente l'étude d'une nouvelle méthode d'estimation spectrale qui permet de s'affranchir du problème de recouvrement spectral au voisinage des frontières des sous-bandes, tout en conservant ses bonnes propriétés ((P_1) et (P_2)).

La section 2 est dédiée à la formulation du problème et la section 3 présente la méthode proposée : le couplage entre modulation du signal à analyser et son découpage en sous-bandes avant d'appliquer une méthode d'estimation spectrale sur les signaux de sous-bande décimés. Les résultats de simulation sont présentés dans la section 4 et les conclusions en section 5.

2 Formulation du Problème

Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons à l'analyse spectrale de signaux présentant un spectre continu ou discontinu. Pour illustrer le cas de signaux à spectre continu, nous choisissons d'étudier un signal de type autorégressif d'ordre p (AR(p)) dont les modules des pôles soient suffisamment petits devant 1 (afin d'assurer la continuité du spectre). Le cas de signaux à spectre discontinu est traité en analysant un signal périodique, présentant donc un spectre de "raies". Ainsi, le signal peut s'écrire sous la forme d'une somme de K sinusoides à phases uniformément réparties entre 0 et 2π auxquelles se rajoute un bruit blanc gaussien de puissance σ_b^2 :

$$u(n) = \sum_{l=1}^K A_l \cos(2\pi f_l n + \phi_l) + b(n), \quad (1)$$

où $n = 0, \dots, N - 1$. Le problème de l'estimation des fréquences f_l à partir des échantillons observés $u(n), n = 0, \dots, N - 1$ a reçu un intérêt considérable dans la littérature sur le traitement du signal (voir par exemple [6] et les références qu'il contient).

Afin d'illustrer le problème de recouvrement spectral dû au découpage en sous-bandes, considérons le cas d'une seule sinusoïde noyée dans un bruit blanc gaussien additif :

$$u(n) = A_1 \cos(2\pi f_1 n + \phi_1) + b(n), \quad (2)$$

où $A_1 = 1$, $f_1 = 0.32$ en fréquences normalisées, ϕ_1 est uniformément répartie sur $[0, 2\pi[$ et la variance du bruit blanc additif est $\sigma_b^2 = E[b^2(n)] = 1/5\sqrt{2}$ (le rapport signal à bruit est $SNR = 10 \log\left(\frac{A_1^2}{2\sigma_b^2}\right) = 5.48dB$). Le signal $u(n)$ est filtré par un banc de filtres à $M = 8$ sous-bandes, la $j^{\text{ème}}$ sous-bande étant représentée figure 1. On considère un banc de filtres uniforme, chaque filtre $H_j(e^{i2\pi f})$ étant centré sur la sous-bande

$$\left[j \frac{0.5}{M}, (j+1) \frac{0.5}{M}\right], j = 0, \dots, M-1, \quad (3)$$

A l'issue du filtrage et de la décimation qui l'accompagne, le signal x_j en sortie de la $j^{\text{ème}}$ sous-bande est analysé par son spectre autorégressif (l'ordre de modélisation AR choisi est 16). La figure 2 présente les spectres autorégressifs moyennés sur 50 réalisations des 5^{ème} et 6^{ème} sous-bandes correspondant aux bandes de fréquence respectives $[0.25, 0.3125[$ et $[0.3125, 0.375[$. Comme on peut le voir, deux différents pics apparaissent dans ces deux sous-bandes contigües car la fréquence du signal sinusoïdal f_1 est trop proche de la frontière des deux sous-bandes. Ceci amène une ambiguïté : comment être sûr à la suite d'une analyse spectrale des sous-bandes qu'il s'agit bien de la même composante "vue" par les deux sous-bandes contigües et non pas de deux composantes fréquentielles distinctes ? Ce problème d'ambiguïté dans l'analyse spectrale effectuée à partir d'un découpage en sous-bandes est

lié à un problème de recouvrement spectral. En effet, en considérant un banc de filtres uniforme constitué de M voies, l'expression théorique de la transformée de Fourier du signal de sous-bande $x_j(n)$ exprimée en Mf est donnée par :

$$X_j(e^{i2\pi Mf}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H_j(e^{i2\pi(f-\frac{l}{M})}) U(e^{i2\pi(f-\frac{l}{M})}), \quad (4)$$

où $U(e^{i2\pi f})$ note la transformée de Fourier de $u(n)$. Cette expression fait bien apparaître les termes correspondant au recouvrement fréquentiel obtenus pour $l = 1, \dots, M-1$. Il convient de plus de signaler que si les filtres étaient des passe-bandes idéaux, on n'aurait pas de recouvrement fréquentiel puisque pour chaque sous-bande numéro j , $\forall f \in [j \frac{0.5}{M}, (j+1) \frac{0.5}{M}[$, les termes $H_j(e^{i2\pi(f-\frac{l}{M})})$ seraient tous nuls dès que $l \neq 0$.

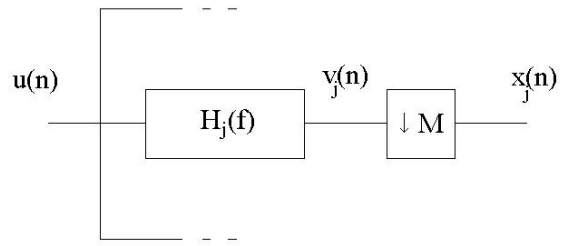


FIG. 1 – Banc de filtres uniforme à M sous-bandes. $j^{\text{ème}}$ sous-bande.

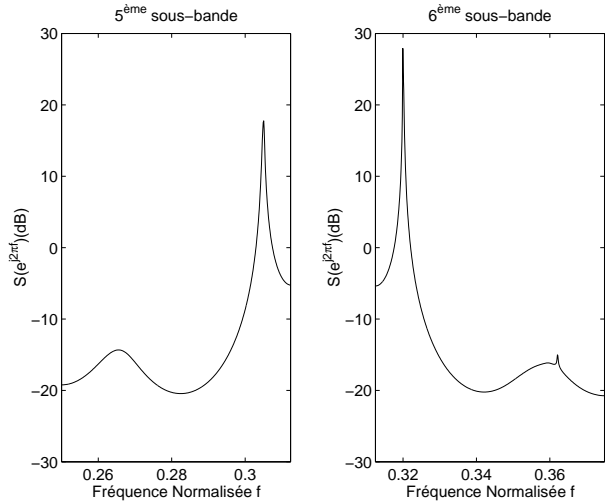


FIG. 2 – Spectre AR moyen des 5^{ème} et 6^{ème} sous-bandes d'un signal sinusoïdal bruité filtré.

3 La méthode proposée

Le but de cet article est de présenter une manière d'effectuer l'analyse spectrale de $u(n)$ à l'aide d'une méthode pa-

ramétrique couplée à du découpage en sous-bandes, afin de profiter des propriétés (P_1) et (P_2) tout en éliminant les problèmes d'ambiguïté liés au recouvrement spectral, illustrés dans le paragraphe précédent. L'originalité de la démarche proposée est de conduire une analyse spectrale "séquentielle", en cherchant à estimer le contenu spectral du signal à des fréquences f successives. Ainsi, l'idée principale de la méthode proposée ici est de moduler le signal à analyser ($u(n)$) par une exponentielle complexe avant de le présenter au banc de filtres :

$$u_{\Delta}(n) = u(n)e^{i2\pi\Delta_f n}, \quad (5)$$

pour décaler la composante spectrale à estimer de la fréquence f à $F_j = j\frac{0.5}{M} + \frac{0.25}{M}$ où j est le numéro de la sous-bande contenant f (F_j est le "milieu" de la sous-bande contenant f). On choisit donc $\Delta_f = F_j - f$ et un banc de filtres en divisant l'intervalle fréquentiel $[0, 0.5[$ en M sous-bandes identiques et vérifiant :

$$\forall j, H_j(e^{i2\pi(F_j - \frac{f}{M})}) = \delta(l), \quad (6)$$

où $\delta(l)$ désigne le symbole de Kronecker. La réponse fréquentielle des filtres avec $M = 8$ sous-bandes est donnée figure 3. On vérifie bien que la réponse fréquentielle de chacun des 8 filtres $H_j(e^{i2\pi f})$ s'annule bien au milieu des $M - 1$ sous-bandes dont le numéro est différent de j . Avec un tel banc de filtre, on parvient à éliminer totalement le problème du recouvrement spectral en F_j puisqu'on a exactement :

$$U_{\Delta}(e^{i2\pi F_j}) = M X_j(e^{i2\pi M F_j}) \quad (7)$$

où U_{Δ} désigne la transformée de Fourier de $u_{\Delta}(n)$. Dans la suite de cet article, cette méthode permettant d'éliminer le problème du recouvrement spectral sera appelée DSBM : Découpage en Sous-Bandes du signal Modulé. L'inconvénient majeur est que du point de vue temps réel, on doit appliquer, pour chaque composante fréquentielle f , toute une méthode d'analyse spectrale destinée normalement à estimer le spectre tout entier ($\forall f \in [0, 0.5]$). On a choisi de décaler chaque fréquence f à analyser au milieu de sa sous-bande correspondante car cela ramène l'estimation sur le signal de sous-bande $x_j(n)$ en $M F_j = 0.5j + 0.25$, soit $f = \pm 0.25$, modulo 1. En effet, on trouve à cette fréquence beaucoup de bonnes propriétés concernant de nombreuses méthodes d'analyse spectrale. En particulier, pour un signal composé d'une somme de sinusoides noyées dans du bruit blanc additif, la puissance de l'erreur de prédiction linéaire, ainsi que le nombre de conditionnement de la matrice d'autocorrélation (utilisée en modélisation autorégressive, modélisation de Prony et toutes les méthodes "haute-résolution") admettent un minimum lorsque le barycentre des fréquences est autour de ± 0.25 .(voir [7]).

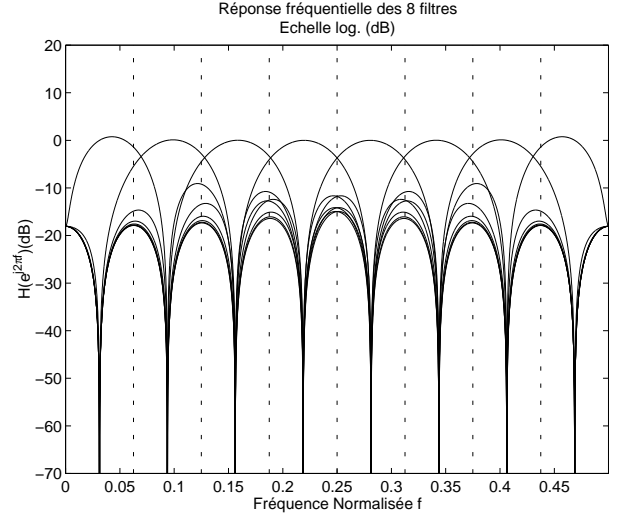


FIG. 3 – Réponse fréquentielle du banc de filtres uniforme à 8 sous-bandes.

4 Résultats de simulation et performances de la méthode

Les simulations ont été réalisées en utilisant $M = 8$ sous-bandes, avec des filtres d'analyse issus de la modulation en cosinus d'un même filtre d'ordre $2M$:

$$h_0(n) = 1, \forall n = 0, \dots, 2M - 1 \text{ et } 0 \text{ ailleurs}, \quad (8)$$

$$\iff H_0(e^{i2\pi f}) = e^{i2\pi f(2M-1)} \frac{\sin 2\pi f M}{\sin \pi f}, \quad (9)$$

De tels filtres, appelés filtres "peigne" (ou "comb filters" en Anglais) sont couramment utilisés dans le domaine du découpage en sous-bandes mais pour d'autres utilisations (voir [8], p.227). On vérifie facilement que ce banc de filtres vérifie bien la relation donnée par l'Eq.(6). Concernant le choix de la méthode d'estimation spectrale, de nombreux algorithmes ont été étudiés pour résoudre le problème d'estimation des composantes fréquentielles $U(e^{i2\pi f})$ à partir des échantillons observés $u(n), n = 0, \dots, N - 1$, comme les moindres carrés linéaires, des méthodes de type Yule-Walker utilisant les moments d'ordre supérieur ou égal à 2, les méthodes MUSIC et Pisarenko, etc... [6]. Pour les simulations de cet article, on utilise une modélisation autorégressive de type Yule-Walker (ARYW) en utilisant une estimation non biaisée de l'autocorrélation ([9], p. 159). Cette méthode a été choisie pour sa simplicité mais d'autres types de méthodes plus complexes, comme la méthode HOYW ([6], p. 151), pourraient bien sûr être envisagées.

Dans le cas de signaux à spectre de raies, le signal test est constitué de $K = 1$ sinusoides de fréquence normalisée $f_1 = 0.32$ noyée dans un bruit blanc gaussien additif de puissance $\sigma_b^2 = 1/5\sqrt{2}$. L'ordre de modélisation AR dans les sous-bandes choisi est $p_{sub} = 4$. La figure 4 montre le spectre reconstitué du signal $u(n)$ à l'aide de la

méthode DSBM sur 50 réalisations pour les 5^{ème} et 6^{ème} sous-bandes.

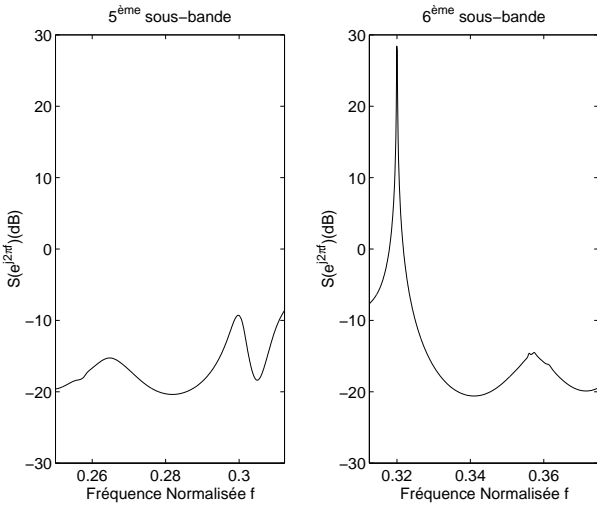


FIG. 4 – Spectre reconstitué du signal $u(n)$ dans les 5^{ème} et 6^{ème} sous-bandes obtenu à partir de la méthode DSBM.

Cette figure, comparée à la figure 2 montre bien la capacité de la méthode à éliminer le problème du recouvrement spectral au voisinage des frontières des sous-bandes. Afin d’illustrer les propriétés du découpage en sous-bandes vis-à-vis de la résolution fréquentielle, on a réalisé la même simulation, mais en utilisant le même ordre de modélisation AR sur le signal original et sur les signaux de sous-bande : $p = p_{sub} = 4$. Le tableau ci-dessous présente les résultats statistiques obtenus sur 50 réalisations du signal $u(n)$ quant à la position du maximum du spectre AR estimé sur le signal original et grâce à la méthode DSBM.

$f_1 = 0.32$	Moyenne	Ecart-type
Signal Original	$0.32 + 2.54 \cdot 10^{-4}$	$3.95 \cdot 10^{-4}$
Méthode DSBM	$0.32 + 7.43 \cdot 10^{-6}$	$2.05 \cdot 10^{-4}$

Ce tableau montre les performances de l’estimateur spectral fourni par la méthode DSBM tant en termes de moyenne que d’écart-type sur la position du maximum du spectre. Dans un deuxième temps, il est important de démontrer aussi l’intérêt de la méthode proposée dans le cas de signaux à spectre continu. Dans ce cas, nous choisissons d’étudier un signal AR d’ordre 16 réalisé par filtrage d’un bruit blanc gaussien centré de puissance $\sigma^2 = 1.2$ à l’aide d’un filtre à réponse impulsionnelle infinie. On choisit un ordre de modélisation $p = 16$ (ordre théorique) pour la modélisation AR sur le signal original et $p_{sub} = 2$ pour les signaux de sous-bande. La figure 5 présente le spectre AR théorique du signal à analyser et ses estimations par modélisation AR directe d’ordre $p = 16$ sur le signal original et en utilisant la méthode DSBM sur les signaux de sous-bande. En choisissant $p_{sub} \simeq p/M$, on conserve la même résolution sur l’estimation du spectre mais les simulations montrent qu’on gagne un facteur allant de 9 à 21

dB sur la puissance de l’erreur de prédiction linéaire selon la fréquence d’analyse f et selon la sous-bande (figure 6). La figure 7 montre le gain en stabilité numérique qui s’échelonne de 26 à 32 dB.

5 Conclusion

Dans cet article, on a présenté une nouvelle méthode d’analyse spectrale basée sur l’utilisation du Découpage en Sous-Bandes et d’une Modulation préalable (DSBM). On s’est particulièrement intéressé aux performances de cette méthode dans l’élimination du recouvrement spectral au voisinage des fréquences de coupure des filtres d’analyse en sous-bandes. L’analyse en sous-bandes permet d’améliorer l’estimation au sens d’un critère théorique (puissance de l’erreur de prédiction linéaire) et au sens numérique (nombre de conditionnement de la matrice d’autocorrélation). Pour l’instant, cette méthode n’est applicable qu’à des signaux dont le spectre varie lentement dans le temps pour des raisons de rapidité de calcul. Des travaux futurs seront menés sur le choix optimal du Δ_f , du banc de filtres d’analyse (utilisation d’un banc de filtres non uniforme ou autre choix de filtres pour banc uniforme), la distribution optimale des ordres de modélisation paramétrique et le choix optimal d’un algorithme d’estimation spectrale dans chaque sous-bande.

Références

- [1] J. W. Woods, *Subband image coding*. Boston (MA) : kluwer, 1994.
- [2] A. Gersho and R. M. Gray, *Vector quantization and signal compression*. Boston (MA) : kluwer, 1992.
- [3] S. Rao and W. A. Pearlman, “Analysis of linear prediction, coding, and spectral estimation from subbands,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 42, pp. 1160–1178, July 1996.
- [4] A. Tkacenko and P. P. Vaidyanathan, “Sinusoidal frequency estimation using filter banks,” in *Proc. IEEE ICASSP-2001*, (Salt Lake City, Utah), pp. 825–828, May 2001.
- [5] G. H. Golub and C. F. Van-Loan, *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [6] P. Stoica and R. Moses, *Introduction to spectral analysis*. Englewood Cliffs NJ : Prentice-Hall, 1997.
- [7] A. Ducasse, *Estimation de sous-harmoniques à l’aide de méthodes paramétriques*. Thèse, 1997.
- [8] R. E. Crochiere and L. R. Rabiner, *Multirate Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 1983.
- [9] S. M. Kay, *Modern Spectral Estimation : Theory and Applications*. Englewood Cliffs (NJ) : Prentice Hall, 1988.

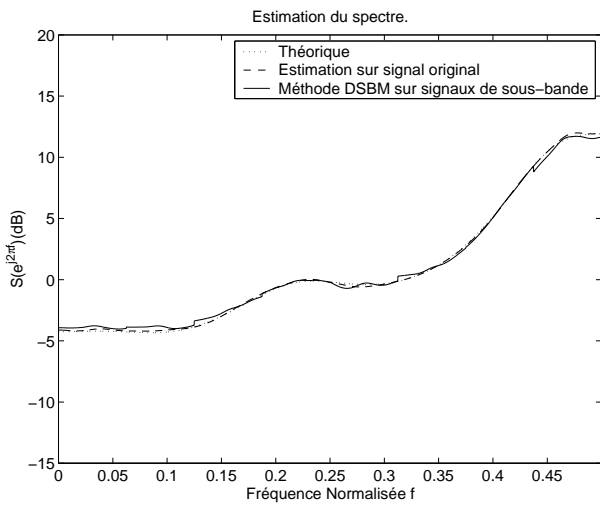


FIG. 5 – Spectre théorique, obtenu par modélisation AR directe et par la méthode DSBM.

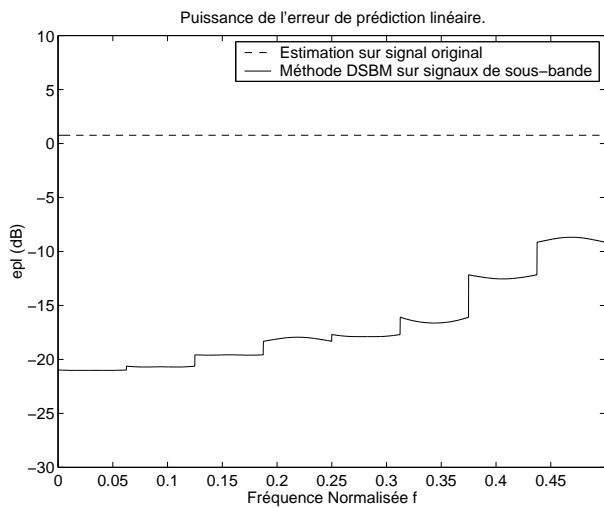


FIG. 6 – Puissance de l'erreur de prédiction linéaire obtenue par modélisation AR directe et par la méthode DSBM.

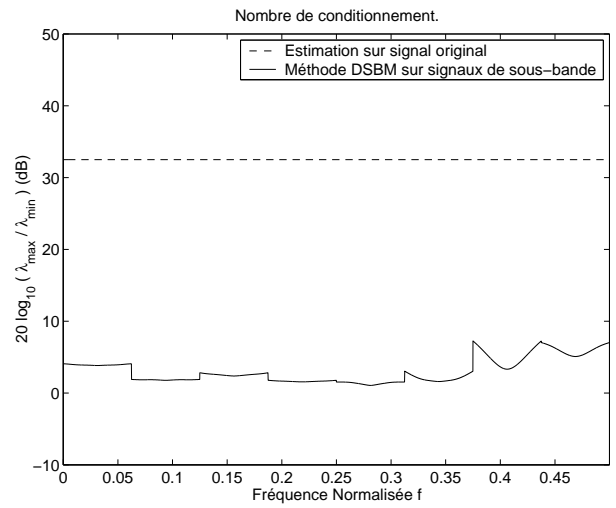


FIG. 7 – Nombre de conditionnement de la matrice d'autocorrélation obtenu par modélisation AR directe et par la méthode DSBM.